О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. И. Аптекарев и М. Л. Ятцелев

Приближения алгебраических функций рациональными – функциональные аналоги диофантовых аппроксимаций

Москва — 2016

УДК 517.53+517.9
Александр Иванович Аптекарев, Максим Леонидович Ятцелев
Приближения алгебраических функций рациональными – функциональные аналоги диофантовых аппроксимаций. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016.

Цель этой работы – обсудить приложения нашего результата об асимптотике подходящих непрерывной дроби для аналитической функции с точками ветвления. Речь пойдет об известных задачах: о нормальности аппроксимаций Паде для алгебраических функций (функциональный аналог теоремы Туэ-Зигеля-Рота и $\varepsilon = 0$ гипотеза Гончара–Чудновских), об оценке числа "ложных" ("блуждающих") полюсов для рациональных аппроксимаций (гипотеза Шталя), о возникновении и исчезании дефектов (дуплетов Фруассара).

Ключевые слова: рациональные аппроксимации, алгебраические функции, сильные асимптотики, скорость диофантовых приближений.

Alexander I. Aptekarev, Maxim L. Yattselev
Approximations of algebraic functions by rational ones – functional analogues of diophantine approximants. Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2016.

A goal of this note is to discuss applications of our result on asymptotics of the convergents of a continued fraction of an analytic function with branch points. We consider famous problems: on normality of the Pade approximants for algebraic functions (a functional analog of the Thue-Siegel-Roth theorem and $\varepsilon = 0$ Gonchar–Chudnovskies conjecture), on estimation of the number of “spurious” (“wandering”) poles of rational approximants for algebraic functions (Stahl conjecture), on appearance and disappearance of the Froissart doublets.

Key words: rational approximants, algebraic functions, strong asymptotics, degree of the diophantine approximations.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

Оглавление

1. Введение

1.1. Непрерывные дроби и диагональные аппроксимации Паде. Действительному числу $\alpha \in \mathbb{R}$ *алгоритм Евклида* (выделение целой части, обращение дробной части, снова выделение целой части и т.д.) ставит в соответствие непрерывную дробь

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+\dots}\,, \tag{1.1}$$

коэффициенты которой (*неполные частные*) – натуральные числа $\{a_l \in \mathbb{N}\}$. Конечные отрезки непрерывной дроби (*подходящие*)

$$a_0 + \frac{1}{a_1+\dots}\,\frac{1}{a_n} := \frac{p_n}{q_n} \ \in \ \mathbb{Q}\,, \tag{1.2}$$

– рациональные (*диафантовы*) приближения действительного числа α.

Аналогично, степенному ряду (*ростку* функции) в окрестности точки ∞

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{z^k}\,, \qquad f_1 = 1\,, \tag{1.3}$$

алгоритм Евклида (обращение, выделение полиномиальной части, снова обращение регулярной части и т.д.) ставит ряду в соответствие *непрерывную дробь* с полиномиальными коэффициентами $\{t_l(z)\}_{l=1}^{\infty}$:

$$f(z) = \frac{1}{t_1(z)+}\,\frac{1}{t_2(z)+}\,\frac{1}{t_3(z)+\dots}\,. \tag{1.4}$$

Если $f(z)$ не рациональна, то непрерывная дробь (1.4) состоит из бесконечного числа этажей. Конечная часть непрерывной дроби является рациональной функцией

$$\frac{1}{t_1(z)+\dots}\,\frac{1}{t_n(z)} := \frac{p_n(z)}{q_n(z)} = \pi_n(z)\,, \tag{1.5}$$

которую называют *подходящей* непрерывной дроби. Другое название рациональной функции (1.5) — *диагональная аппроксимация Паде* степенного ряда (1.3), которая конструктивно определяется системой линейных уравнений

$$R_n(z) := q_n(z)f(z) - p_n(z) = \mathcal{O}\left(1/z^{n+1}\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty\,, \tag{1.6}$$

на коэффициенты многочленов q_n и p_n степени не выше чем n. Вообще говоря, эта система имеет неединственное решение, но отношение многочленов из (1.6) определяет рациональную функцию (1.5) однозначно (после сокращения). Индекс n и рациональная функция (1.5) называются *нормальными*, если $\deg q_n(z) = n$ (после сокращений). В этом случае мы нормируем знаменатель

$$q_n(z) = z^n + \dots\,.$$

1.2. Функции с точками ветвления и полюсы рациональных аппроксимаций. Мы рассматриваем класс аналитических функций, росток (1.3) которых имеет аналитическое продолжение в $\overline{\mathbb{C}}$ по любому пути, не проходящему через конечное число точек A:

$$f \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{C}} \setminus A)\,, \qquad \sharp\, A < \infty\,, \tag{1.7}$$

которые мы для определённости считаем точками ветвления функции f.

Рациональные аппроксимации (1.5), будучи функциями однозначными, приближают (в определенном смысле) голоморфную (т.е. однозначную) ветвь ростка (1.3), (1.7) в некоторой области D (там где эту голоморфную ветвь можно выделить):

$$\mathcal{D}_{f,\,\infty} := \big\{ D: \quad f \in \mathcal{H}(D)\,, \quad \infty \in D \big\}\,. \tag{1.8}$$

При этом их полюсы (нули $q_n(z) := \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_{k,n})$) стремятся (в определенном смысле) к границе ∂D этой области голоморфности $D \in \mathcal{D}_{f,\,\infty}$.

1.3. Гипотеза Наттолла и теорема Шталя. Дж. Наттолл в [2] выдвинул гипотезу о сходимости подходящих для (1.7) по ёмкости

$$\pi_n \xrightarrow[D^*]{cap} f\,, \qquad D^* \in \mathcal{D}_{f,\,\infty} \tag{1.9}$$

в области голоморфности с минимальной (в смысле логарифмической ёмкости) границей

$$D^* \in \mathcal{D}_{f,\,\infty}\ : \qquad \partial D^* = \min_{\partial D,\ D \in \mathcal{D}_{f,\,\infty}} \operatorname{cap}(\partial D)\,. \tag{1.10}$$

Гипотеза Наттолла была доказана Г.Шталем ([3], [4], [5]) даже в более широком классе, чем (1.7), а именно

$$\operatorname{cap}(A) = 0\,. \tag{1.11}$$

При этом Шталь нашёл слабый предел полюсов π_n

$$\nu_{q_n}(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta(z - z_{k,n}) \ \overset{*}{\to}\ \omega(z)\,, \qquad \operatorname{supp} \omega = \partial D^*\,, \tag{1.12}$$

где ω — равновесная мера компакта $\overline{\mathbb{C}} \setminus D^*$, и доказал слабую (логарифмическую) асимптотику многочлена $q(z)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |q_n(z)| = -V^{\omega}(z) := \int \log|z - t|\, d\omega(t)\,. \tag{1.13}$$

1.4. “Блуждающие” полюсы и равномерная сходимость. Замечательный результат Шталя описывает поведение полюсов π_n “в целом” (см. (1.12)), но не позволяет контролировать динамику (по n) отдельных нулей q_n, называемых “блуждающими” (“wandering”) или “ложными” (“spurious”), которые в отличие от большинства нулей q_n не стремятся к ∂D^*. Для учёта этих тонких эффектов нужны более точные, чем (1.13), асимптотики π_n.

В работе [1] мы исследовали т. н. сильные асимптотики для q_n (и для R_n)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{\Phi^n} = ? \quad \text{в} \quad D^* \,, \tag{1.14}$$

где Φ – подходящим образом определённая нормализующая функция. Сильные асимптотики (1.14) позволяют контролировать “блуждающие” полюсы и отвечать на вопросы о равномерной сходимости подходящих (1.5) непрерывной дроби (1.4) для аналитических ростков (1.3) из класса (1.7):

$$f - \pi_n = \frac{R_n}{q_n} \rightrightarrows \; ? \,. \tag{1.15}$$

1.5. Цель и структура работы. Мы хотим обсудить здесь некоторые приложения нашего результата из [1] об асимптотике подходящих непрерывной дроби для аналитической функции с точками ветвления. Речь пойдет об известных задачах: о нормальности аппроксимаций Паде для алгебраических функций (функциональный аналог теоремы Туэ-Зигеля-Рота и $\varepsilon = 0$ гипотеза Гончара–Чудновских), об оценке числа “ложных” (“блуждающих”) полюсов для рациональных аппроксимаций (гипотеза Шталя), о возникновении и исчезании дефектов (дуплетов Фруассара). В следующей секции 2 мы вводим необходимые понятия для формулировки теоремы о сильной асимптотике из [1]. В секции 3 мы приводим формулировку этой теоремы и проводим обсуждение самой формулировки и непосредственных следствий теоремы. Секция 4 посвящена связи нормальности аппроксимаций Паде для рассматриваемых функций с возникновением специальных дивизоров в задаче Якоби обращения абелевых интегралов. Именно эта связь позволит прояснить упомянутые выше известные задачи в заключительных секциях 5 и 6.

2. Необходимые понятия

2.1. Геометрия экстремальной области голоморфности D^*. Отметим, что оригинальное доказательство теоремы Шталя довольно-таки тяжёлое (занимает несколько статей), и за прошедшие 30 лет существенного его упрощения не получено (даже при сужении рассматриваемого класса с (1.11) до (1.7)).

Однако для функций из класса (1.7) доказательство существования экстремальной области голоморфности D^* (см. (1.10)) и описание структуры экстремальных множеств D^* и ∂D^* благодаря Е.А. Рахманову (см. [6], а также [7], [1]) в настоящее время выглядит коротко и прозрачно. Известно, что в классе (1.7) компакт минимальной ёмкости (1.10)

$$\Delta := \partial D^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus D^* = E \cup \bigcup \Delta_k \tag{2.1}$$

состоит из конечного числа открытых аналитических дуг $\{\Delta_k\}$ и конечного множества точек E, каждая из которых суть концевая точка по крайней мере одной из дуг. Для функции Грина $g_\Delta(z)$ компакта Δ (с особенностью в точке ∞) известно представление, которое для её производной имеет вид

$$h(z) := (2\partial_z g_\Delta)(z) = \frac{1}{z} + \cdots = \sqrt{\frac{B(z)}{A(z)}}, \tag{2.2}$$

где $2\partial_z := \partial_x - i\partial_y$, $\deg(B) = \deg(A) - 2$, и

$$A(z) := \prod_{k=1}^{p}(z - a_k)\,, \qquad \{a_1, \dots, a_p\} := A \cap E\ , \tag{2.3}$$

а многочлен B определяется из условия мнимости периодов абелевого интеграла $\int h\, dz$ и характера монодромии приближаемой функции f.

2.2. Риманова поверхность и её стандартные характеристики.

2.2. 1. Определение и структура листов. Пусть $\mathfrak{R}$ — риманова поверхность функции h, см. (2.2):

$$\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_h \quad \Leftrightarrow \quad h^2 - \frac{B(z)}{A(z)} = 0\ . \tag{2.4}$$

Это гиперэллиптическая риманова поверхность, двулистное накрытие $\bar{\mathbb{C}}$ которой имеет вид: $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}^{(0)} \cup \mathfrak{R}^{(1)}}$, $\mathfrak{R}^{(l)} := \pi_l^{-1}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}) =: D^{(l)}$, $l = 0{,}1$, с переклейкой "крест-накрест" листов по аналитическим дугам $\{\Delta_k\}$ и отождествлением точек ветвления E, см. (2.1). Тем самым, каждой дуге $\overline{\Delta_k}$ соответствует цикл $L_k := \pi^{-1}(\overline{\Delta_k})$ на $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(0)} \cup L \cup \mathfrak{R}^{(1)}$, $L := \bigcup_k L_k$, ориентированный так, что область $D^{(0)}$ остаётся слева, когда её граница L_k обходится в положительном направлении.

2.2. 2. Род и гомологический базис. Количество и кратность нулей многочленов $A(z)$ и $B(z)$ в (2.2), (2.3) однозначно определяют род $\mathfrak{R}$

$$g := \mathrm{gen}(\mathfrak{R})\ . \tag{2.5}$$

Зафиксируем гомологический базис циклов на $\mathfrak{R}$

$$\{\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k\}_{k=1}^{g} \quad : \quad \{\mathbf{b}_k\}_{k=1}^{g} \subset \{L_k\},$$

и $\mathbf{a}_k = a_k^{(0)} \cup a_k^{(1)}$, $a_k^{(j)} \subset \mathfrak{R}^{(j)}$, $j = 0{,}1$, $\pi(a_k^{(0)}) = \pi(a_k^{(1)}) = \Delta_k^a$. Обозначим канонические рассечения $\mathfrak{R}$

$$\widetilde{\mathfrak{R}} := \mathfrak{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{g} (\mathbf{a}_k \cup \mathbf{b}_k) \quad \text{и} \quad \widehat{\mathfrak{R}} := \mathfrak{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{g} \mathbf{a}_k \, .$$

2.2. 3. Абелев интеграл и главный член асимптотики. Определим

$$G = \int h\, dz \quad \text{и} \quad \Phi = e^{G} \, . \tag{2.6}$$

Из (2.2) имеем $\Phi^{(0)}\Phi^{(1)} \equiv 1$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_k \Delta_k^a$. Обозначим скачки на циклах

$$\frac{\Phi^+}{\Phi^-} = \begin{cases} \exp\left\{2\pi i \omega_k\right\} & \text{на} \quad \mathbf{a}_k, \\ \exp\left\{2\pi i \tau_k\right\} & \text{на} \quad \mathbf{b}_k, \end{cases} \tag{2.7}$$

где действительные константы ω_k и τ_k выражаются

$$\omega_k := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_k} h(t)dt \quad \text{и} \quad \tau_k := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{a}_k} h(t)dt \, . \tag{2.8}$$

Имеем (фиксируя унитарный множитель)*

$$\Phi(z) := \Phi^{(0)}(z) = \frac{z}{\operatorname{cap}(\Delta)} + O(1) \, , \quad z \to \infty \, . \tag{2.9}$$

2.2. 4. Базис голоморфных дифференциалов. Фиксируем

$$d\vec{\Omega} := (d\Omega_1, \ldots, d\Omega_g)^T$$

вектор-столбец нормированного базиса голоморфных дифференциалов

$$\oint_{\mathbf{a}_k} d\vec{\Omega} = \delta_{k,l} \qquad k, l = 1, \ldots, g. \tag{2.10}$$

Обозначим (симметрична с положительно определённой мнимой частью) матрицу Римана

$$\mathcal{B}_\Omega := \left[\oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k \right]_{j,k=1}^{g} . \tag{2.11}$$

---

*В дальнейшем (когда это не приводит к недоразумениям) мы опускаем верхний индекс (0) для обозначения главной (т.е. взятой с $\mathfrak{R}^{(0)}$) ветви аналитической функции на $\mathfrak{R}$.

2.3. Проблема Якоби обращения абелевых интегралов. В предположении, что
$$\rho(z) := (f^+ - f^-)(z)\big|_{\Delta\setminus E} \neq 0\,, \tag{2.12}$$
фиксируем непрерывную ветвь $\log(\rho/h^+)$ на $\Delta \setminus E$ и определяем вектор
$$\vec{c}_\rho := \frac{1}{2\pi i}\oint_L \log(\rho/h^+)\, d\vec{\Omega}\,, \tag{2.13}$$
который вместе с векторами (см. (2.7), (2.8)
$$\begin{cases} \vec{\omega} &:= \ \big(\omega_1, \ldots, \omega_g\big)^T, \\ \vec{\tau} &:= \ \big(\tau_1, \ldots, \tau_g\big)^T, \end{cases} \tag{2.14}$$
задает правую часть следующей проблемы Якоби обращения абелевых интегралов
$$\sum_{j=1}^{g}\int_{b_j^{(1)}}^{\mathbf{t}_{n,j}} d\vec{\Omega} \,\equiv\, \vec{c}_\rho + n\big(\vec{\omega} + \mathcal{B}_\Omega\vec{\tau}\big), \quad \Big(\mathrm{mod\ periods}\, d\vec{\Omega}\Big)\,. \tag{2.15}$$
Здесь $\{b_j^{(1)}\}_{j=1}^{g}$ – нули многочлена $B(z)$. Простые нули соответствуют точкам ветвления, а нули с чётной кратностью помещаются на $\mathfrak{R}^{(1)}$ лист римановой поверхности и учитываются в половину своей кратности число раз.

Также напомним, что
$$\vec{c} \equiv \vec{e},\ (\mathrm{mod\ periods}\, d\vec{\Omega}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} - \vec{e} = \vec{j} + \mathcal{B}_\Omega\vec{m}\,, \quad \vec{j}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^g.$$
Известно, что решение $\{\mathbf{t}_{n,j}\} := \vec{\mathbf{t}}_n \in \mathcal{R}^g$ проблемы Якоби (2.15) всегда существует, но может быть не единственным. Любое решение проблемы Якоби имеет вид
$$\{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g-2k}\bigcup\{z_j^{(0)}\}_{j=1}^{k}\bigcup\{z_j^{(1)}\}_{j=1}^{k}\,, \tag{2.16}$$
где в первой группе нет точек, находящихся в инволюции (т.е. $a = \tilde{b} \Leftrightarrow a \neq b,\ \pi(a) = \pi(b)$), а точки, находящиеся в инволюции, могут быть помещены в любое место $\mathfrak{R}$, при этом (2.16) остаётся решением (2.15). Соглашение: все инволюционные точки решения помещаем в $\infty^{(0)}$ и $\infty^{(1)}$.

3. Формулы сильной асимптотики рациональных аппроксимаций

3.1. Ограничительные условия. Сначала мы зафиксируем ограничения на класс (1.7) и индекс n, которые мы используем в доказательстве теоремы о сильной асимптотике.

Характер ветвлений. Мы предполагаем, что все ветвления имеют алгебро-логарифмический характер (**AL** – условие). Т.е.

$$(\mathbf{AL}) \quad f: \quad f(z) = h_1(z)\psi(z) + h_2(z), \quad \psi(z) = \begin{cases} (z-a_k)^{\alpha(a_k)} \\ \log(z-a_k) \end{cases}, \tag{3.1}$$

где $h_l(z) \in H(D^{\varepsilon}_{a_k})$, $l = 1{,}2$.

Расположение точек ветвления. Следующее условие исключает некоторые "вырожденные" геометрии компакта минимальной ёмкости Δ (см. (1.10), (2.1). Мы предполагаем, что точки множества A (точки ветвления f) расположены таким образом (**GP** – условие), что в выражении (2.2) для функции h компакта Δ нули нечётной кратности многочлена $B(z)$ просты.

$$(\mathbf{GP}) \quad A: \quad h(z) = \sqrt{\frac{B(z)}{A(z)}}, \quad B(z) = \prod_{j=1}^{p-2m}(z-b_j) \prod_{j=p-2m+1}^{g}(z-b_j)^2 \,. \tag{3.2}$$

Здесь подсчёт нулей чётной кратности, как и ранее (см. (2.15)), а многочлен $A(z)$ задан в (2.3).

Ясно, что точки множества A, подчинённого **GP** – условию, находятся в общем положении ("Generic Position"). Эквивалентная форма **GP** – условия фиксирует геометрию компакта (2.1).

$$(\mathbf{GP}) \quad A: \quad \begin{array}{l} i)\ e \in E \bigcap A \text{ концевая точка ровно одной дуги из } \bigcup \Delta_k; \\ ii)\ e \in E \setminus A \text{ концевая точка ровно трёх дуг из } \bigcup \Delta_k. \end{array}$$

Скачок f на Δ. ($\mathbf{f}\Delta$ – условие) невырожденности скачка f на Δ:

$$(\mathbf{f}\Delta) \quad f: \qquad f^+ - f^- \neq 0 \quad \text{на} \quad \Delta \setminus (A \cap E). \tag{3.3}$$

ε-нормальные индексы. Последовательность $\mathbb{N}_\varepsilon$ (ε-нормальных) индексов определяется (для фиксированного $\varepsilon > 0$) с помощью решений $\vec{\mathbf{t}}_n$ проблемы Якоби (2.15)):

$$(\,\mathbb{N}_\varepsilon) \quad n \in \mathbb{N}_\varepsilon: \quad \begin{cases} \forall\, \vec{\mathbf{t}}_n \Rightarrow |\pi(\mathbf{t}_{n,j})| \le 1/\varepsilon\,,\ \forall\, \mathbf{t}_{n,j} \in \mathfrak{R}^{(0)}; \\ \\ \forall\, \vec{\mathbf{t}}_{n-1} \Rightarrow |\pi(\mathbf{t}_{n-1,j})| \le 1/\varepsilon\,,\ \forall\, \mathbf{t}_{n-1,j} \in \mathfrak{R}^{(1)}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Отметим, что ε-нормальные индексы для достаточно больших n нормальны (для аппроксимаций Паде функций из класса (1.7) с условиями (3.1) и (3.2)) в смысле определения пункта 1.1. (Это одно из следствий доказанной теоремы.) Также отметим факт единственности решения проблемы (2.15) при $n \in \mathbb{N}_\varepsilon$.

3.2. Функция Наттолла-Сегё. Функция $S_n(z)$ определяется как решение следующей однородной краевой задачи Римана на $\mathfrak{R}$ – (3.2) (доказательство существования, единственности и полезных свойств $S_n(z)$ см. в [1]):

(I)

$$(S_n\Phi^n) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{R}\setminus L)\,, \qquad \exists\; S_n^{\pm} \in C(L \cup \bigcup_{k=1}^{g} a_k)\,;$$

(II)

$$(S_n\Phi^n)^- = (\rho/h^+)(S_n\Phi^n)^+ \qquad\qquad \text{на} \quad L\setminus E\,;$$

(III)

$$S(t)=0\,,\;\; t\in\{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g}\setminus\Big(\{a_j\}_{j=1}^{p}\cup\{b_j^{(1)}\}_{j=1}^{g}\Big)\,;$$

(IV)

$$\begin{cases} |S_n(z^{(k)})| \sim |z-a|^{m(a)/2-(-1)^k(1+2\alpha_a)/4} & \text{при} \quad z^{(k)}\to a\in\{a_j\}_{j=1}^{p}\,, \\ |S_n(z^{(k)})| \sim |z-b|^{m(b)/2-1/2+(-1)^k/4} & \text{при} \quad z^{(k)}\to b\in\Big\{b_j^{(1)}\Big\}_{j=1}^{p-2m}\,, \\ |S_n(z^{(1)})| \sim |z-b|^{m(b)-1} & \text{при} \quad z^{(1)}\to b\in\Big\{b_j^{(1)}\Big\}_{j=p-2m+1}^{g}\,. \end{cases}$$

В остальных (за исключением **(III)** и **(IV)**) точках $\mathfrak{R}$ функция S_n конечна и не обращается в нуль. Здесь $m(t)$ обозначает число раз, которое t появляется среди координат вектора решения проблемы Якоби (2.15) – $\vec{\mathbf{t}}_n$.

3.3. Формулировка результата. Справедлива (см. [1])

Теорема 3.1. *Пусть росток f -* (1.3) *принадлежит классу* (1.7) *с дополнительными условиями **(AL)**, **(GP)** и **(fΔ)** (см.* (3.1), (3.2) *и* (3.3)*). Тогда для знаменателей q_n рациональных аппроксимаций* (1.5) *и функций остатка R_n* – (1.6)*, при $n\in\mathbb{N}_\varepsilon$ для фиксированного ε, $n\to\infty$ выполняется*

$$\begin{cases} q_n \;=\; (1+\nu_{n1})\,\gamma_n\,S_n\,\Phi^n \;+\; \nu_{n2}\,\gamma_n^*\,S_{n-1}\,\Phi^{n-1}, \\ R_n \;=\; (1+\nu_{n1})\,\gamma_n\,\dfrac{h\,S_n^{(1)}}{\Phi^n} \;+\; \nu_{n2}\,\gamma_n^*\,\dfrac{h\,S_{n-1}^{(1)}}{\Phi^{n-1}}, \end{cases} \tag{3.5}$$

локально равномерно в D^*, и

$$\begin{cases} q_n \;=\; (1+\nu_{n1})\,\gamma_n\,\Psi_n \;+\; \nu_{n2}\,\gamma_n^*\,\Psi_{n-1}, \qquad \Psi_n := (S_n\Phi^n)^+ \;+\; (S_n\Phi^n)^-, \\ R_n^{\pm} \;=\; (1+\nu_{n1})\,\gamma_n\left(\dfrac{hS_n^{(1)}}{\Phi^n}\right)^{\pm} \;+\; \nu_{n2}\,\gamma_n^*\left(\dfrac{hS_{n-1}^{(1)}}{\Phi^{n-1}}\right)^{\pm}, \end{cases}$$

локально равномерно в $\Delta \setminus E$. *Здесь*

$$\gamma_n := \frac{cap(\Delta)^n}{S_n(\infty)}, \qquad \gamma_n^* := \frac{cap(\Delta)^{n+1}}{S^{(1)}_{n-1}(\infty)}\,,$$

а

$$|\nu_{n,j}| \le \frac{c(\varepsilon)}{n} \quad \text{в} \quad \overline{\mathbb{C}}\,, \qquad \text{и} \qquad \nu_{n,j}(z) = \mathcal{O}\big(1/z\big), \quad z \to \infty, \qquad j = 1{,}2\,.$$

3.4. Обсуждение формулировки результата. Сделаем несколько замечаний в связи с утверждением Теоремы 3.1.

Замечание 3.1. Если множество A состоит из двух точек, то Δ – отрезок, их соединяющий. В этом случае Теорема 3.1 дает известные формулы асимптотики многочленов, ортогональных относительно комплексно-значного веса (если же в (2.12) $\rho > 0$, она превращается в классическую теорему Бернштейна-Сегё). При этом риманова поверхность $\mathfrak{R}$ имеет нулевой род, следовательно, Φ есть простое конформное отображение D^* на $\{|z| > 1\}$ с неподвижной точкой в бесконечности и положительной производной там, и $S_n = S_\rho$ есть классическая функция Сегё.

Замечание 3.2. Дополнительные к (1.7) условия **(GP)**, **(AL)** и **(fΔ)** (см. (3.1), (3.2) и (3.3)) имеют технический характер. При их отсутствии используемый для доказательства Теоремы 3.1 метод матричной задачи Римана-Гильберта требует решения ряда специальных локальных граничных задач. По-видимому, это препятствие может быть обойдено с помощью доказательства существования решения этих задач, не прибегая к нахождению их явных решений (см. подобные примеры в [8], [9]). Кроме того, существуют другие способы возможного снятия этих ограничений. Например, в отсутствие условия **(fΔ)**, см. (3.3), асимптотические формулы могут быть получены из формул Теоремы 3.1 применением преобразования Кристоффеля (см. [10]).

Замечание 3.3. Обратим внимание на то, что проекции на $\mathbb{C}$ обеих функций S_n и hS_n^* голоморфны в D^*. Более того, S_n имеет точно g нулей на $\mathfrak{R}$, которые *зависят* от n. Также можно заключить, что q_n имеет нуль в окрестности каждого нуля S_n, расположенного на $D^{(0)}$. Эти нули называются *ложными* (spurious) или *блуждающими* (wandering), так как их расположение определяется по геометрии $\mathfrak{R}$ и по весовой функции ρ и, вообще говоря, они не приближаются к Δ с ростом n, в то время как остальные нули q_n делают это. С другой стороны, те нули S_n, которые расположены на $D^{(1)}$, являются нулями проекции на $\mathbb{C}$ функции S_n^* и, следовательно, определяют положение нулей R_n (точки дополнительной интерполяции).

Замечание 3.4. Несмотря на то, что Теорема 3.1 применима только к тем нормальным индексам, которые также являются асимптотически нормальными, формула (3.5) объясняет, что происходит в вырожденных случаях. Если для некоторого индекса n решение (2.15) единственно и содержит l экземпляров точки $\infty^{(1)}$, тогда функция $S_n^{(1)}$ имеет в бесконечности нуль порядка l, что в комбинации со второй строкой в (3.5) показывает, что π_n "почти переинтерполировала" функцию f на дополнительные l порядков. Тем самым, существует малое возмущение f (которое не меняет в (2.13) вектора $\vec{c}_\rho$), которое превращает этот индекс n в последний нормальный индекс перед возникновением блока ненормальных индексов размера l, что соответствует факту, что решения (2.15) будут специальными для последующих $l-1$-го индекса и решение для индекса $n+l$ содержит l экземпляров точки $\infty^{(0)}$. В следующей секции мы подробнее остановимся на соответствии теоремы о блоках ненормальных индексов для аппроксимаций Паде со структурой и динамикой по n специальных (неединственных) решений проблемы Якоби (2.15). Именно это соответствие лежит в основе приложений Теоремы 3.1 к функциональным аналогам фундаментальных теорем о скорости диофантовых аппроксимаций.

Заметим, что $\widehat{\rho}-[n/n]_{\widehat{\rho}}=R_n/q_n$, примененное к $f:=\widehat{\rho}$, дает следующее следствие Теоремы 3.1 о равномерной сходимости аппроксимаций Паде:

Следствие 3.1. *В условиях Теоремы 3.1 для $n\in\mathcal{N}_\varepsilon$ справедливо, что*

$$f-[n/n]_{\widehat{\rho}}=[1+\mathcal{O}(1/n)]\frac{S_n^*}{S_n}\frac{h}{\Phi^{2n}} \quad \text{в} \quad D^*_{n,\varepsilon}, \tag{3.6}$$

где $D^*_{n,\varepsilon}:=D^*\setminus\bigcup_{j=1}^{g}\{|z-t_{n,j}|<\varepsilon\}$, множество $\{|z-t_{n,j}|<\varepsilon\}$ заменено на $\{|z|>1/\varepsilon\}$, если $t_{n,j}=\infty$, и $\mathcal{O}(1/n)$ равномерно для фиксированного $\varepsilon>0$.

4. Блочная структура аппроксимаций Паде и специальных дивизоров

В этой секции мы установим связь проблемы Якоби обращения абелевых интегралов (2.15) с нормальностью аппроксимаций Паде аналитических ростков с конечным числом точек ветвления.

4.1. Нормальность и теорема о блоках. Напомним основные положения теории нормальных индексов диагональных аппроксимаций Паде (1.4) (см. [8]). Имеем из (1.4) формулу для знаменателей дробей Паде

$$q_n(z):=\frac{1}{H_n}\begin{vmatrix} f_0 & \dots & f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-1} & \dots & f_{2n-1} \\ 1 & \dots & z^n \end{vmatrix} \qquad H_n:=\begin{vmatrix} f_0 & \dots & f_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-1} & \dots & f_{2n-2} \end{vmatrix},$$

где H_n — определители Ганкеля. Тогда для функции остатка (1.6) имеем

$$2\pi i R_n(z) = \oint\limits_{\infty} \frac{q_n(t)\, f(t)}{z-t}\, dt = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty} \oint\limits_{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^j q_n(t)\, f(t)\, dt = \frac{m_n}{z^{n+1}} + \dots \quad (4.1)$$

где

$$m_n := \frac{H_{n+1}}{H_n}.$$

По определению (см. пункт 1.1) рациональная аппроксимация π_n из (1.3) и индекс $n \in \mathcal{N}$ называются нормальными ($\mathcal{N}(f)$ — множество нормальных индексов), если

$$\exists\ (p_n\ :\ deg\, p_n = n-1)\,,\ (q_n\ :\ deg\, q_n = n)\ :\quad \begin{cases} \pi_n := \frac{p_n}{q_n} - \text{несократима} \\ \\ f - \pi_n = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) \end{cases}.$$

Тогда из (4.1) имеем критерий нормальности

$$H_n \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \mathcal{N}\,.$$

Теорема о блоках утверждает, что все нормальные индексы объединены в блоки, т.е. если n и $n+k$ – два последовательных нормальных индекса, то (после сокращения) справедливо

$$\pi_m = \pi_n\,, \quad \forall\, m \in [n, n+k)\,.$$

Таким образом, если $\mathcal{N} \equiv \mathbb{Z}_+$, то размер всех блоков $= 1$ (тривиальные блоки). Сценарий возникновения нетривиального блока: пусть $n \in \mathcal{N}$, но

$$(f - \pi_n)(z) = \frac{A}{z^{2n+k}} + \dots\,, \quad A \neq 0\,, \quad (4.2)$$

тогда k – размер блока и $A = \frac{m_n}{2\pi i}$.

Следствием теоремы о блоках является

$$\text{а)}\ \begin{cases} n \in \mathcal{N} \\ m_n = 0 \end{cases} \Rightarrow\ n - \text{начало блока размером} \geqslant 2$$

и, более общо для $k > 2$,

$$\text{б)}\ \begin{cases} n \in \mathcal{N} \\ m_n = 0 \\ m_n m_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ m_n \cdots m_{n+k-2} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow\ n - \text{начало блока размера} \geqslant k\,.$$

4.2. Теорема о блоках и специальные дивизоры. В этом пункте мы обсудим, как главный член асимптотики рациональных аппроксимантов (см. Теорему 3.1 в окрестности т. ∞) при больших n и z

$$q_n \approx \gamma_n S_n \Phi^n \ , \quad R_n \approx \gamma_n \, h \, S_n^{(1)} \Phi^{-n} \tag{4.3}$$

согласуется с теорией нормальности аппроксимаций Паде, которую мы вспомнили в предыдущем пункте. Т.е. теперь мы исследуем нули в окрестности бесконечной точки у правых частей приблизительных равенств (4.3).

Напомним (см. (2.2), (2.9)), что функция Φ имеет в бесконечности полюс первого порядка, а функция h имеет ноль первого порядка. Функция Сегё S_n голоморфна на рассечённой $\widetilde{\mathfrak{R}}$ (по договорённости на листе $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(0)}$ мы сохраняем обозначение S_n, а значения на $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(1)}$ обозначаем $S_n^{(1)}$). На $\mathfrak{R}$ функция Сегё обращается в нуль в g точках $\{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g}$ решения проблемы Якоби (2.15) (за исключением точек решений, попавших в точки ветвления $\mathfrak{R}$):

$$\sum_{j=1}^{g} \int\limits_{b_j^{(1)}}^{\mathbf{t}_{n,j}} d\Omega \equiv \vec{c}_{\varphi} + n(\vec{\omega} + \mathcal{B}_{\Omega}\vec{\tau}) \ , \quad (\text{mod periods } d\vec{\Omega}) \ . \tag{4.4}$$

Определим последовательность $\mathcal{N}_0$ строго нормальных индексов решений $\vec{\mathbf{t}}_n$ проблемы Якоби (4.4), (сравни с (3.4))

$$(\mathcal{N}_0) \quad n \in \mathcal{N}_0 \ : \ \infty^{(0)} \notin \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g} \ . \tag{4.5}$$

Обращаясь к (4.3), мы видим, что для строго нормальных n нули функции S_n не понижают порядок полюса у главного члена асимптотики q_n, который равен n, что согласуется с (4.2).

Отметим ещё одно свойство строго нормальных индексов

$$n \in \mathcal{N}_0 \quad \Rightarrow \quad \exists! \, \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g} \tag{4.6}$$

обеспечивать единственность решения (4.4). Действительно, нарушают единственность решения (4.4) точки, находящиеся в инволюции (специальные дивизоры), т.е.

$$\mathbf{t}_{n,j_0} \in \mathfrak{R}^{(0)} \ , \quad \mathbf{t}_{n,j_1} \in \mathfrak{R}^{(1)} \text{ и } \pi(\mathbf{t}_{n,j_0}) = \pi(\mathbf{t}_{n,j_1}) \ ,$$

так как в решении (4.4) находящаяся в инволюции пара может быть заменена на другую пару в инволюции, но с любой другой проекцией, что запрещается (4.5). По тем же соображениям для индексов

$$n \ : \ \infty^{(1)} \notin \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g} \quad \Rightarrow \quad \exists! \, \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g}$$

решение (4.4) единственно.

Разберёмся в блочной структуре неединственных решений $\{\mathbf{t}_{n,j}\}$. Ключевую роль здесь играют соотношения Римана, выражающие b-периоды абелева дифференциала 3-го рода $d\Omega_{w_1,w_2}$ с простыми полюсами и вычетами ± 1 в точках w_1, w_2, нормированного

$$\oint\limits_{a_j} d\Omega_{w_1,w_2} = 0 \; , \quad j = 1, \ldots, g \; , \tag{4.7}$$

через абелевы интегралы 1-го рода (2.10), (2.11)

$$\oint\limits_{b_j} d\Omega_{w_1,w_2} = -2\pi i \int\limits_{w_1}^{w_2} d\Omega_j \; , \quad j = 1, \ldots, g \; . \tag{4.8}$$

С учётом связи гринова дифференциала (2.6) с чисто мнимыми периодами и дифференциала с нормировкой (4.7)

$$dG = d\Omega_{\infty^{(1)},\infty^{(0)}} + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \tau_j \, d\Omega_j \; ,$$

соотношения (4.8) дают:

$$\int\limits_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(0)}} d\vec{\Omega} = \vec{\omega} + B_\Omega \vec{\tau} \; . \tag{4.9}$$

Отсюда сразу следует замечательная импликация

$$\infty^{(1)} \in \{\mathbf{t}_{n-1,j}\}_{j=1}^{g} \Rightarrow \infty^{(0)} \in \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g} \tag{4.10}$$

Обращаясь к (4.3), полученное свойство можно проинтерпретировать так. Если нуль функции Сегё увеличивает порядок нуля в т. ∞ у главного члена асимптотики R_{n-1}, то у главного члена асимптотики q_n произойдёт уменьшение порядка полюса в т. ∞, что находится в полном соответствии с теорией нормальности для аппроксимаций (R_{n-1}, q_n).

Рассмотрим сценарий возникновения блока инволюционных точек в решениях проблемы Якоби (4.4) и его структуру. Пусть n и $n+k, k > 1$, – два последовательных строго нормальных индекса

$$n, \, n+k \in \mathcal{N}_0 \, , \; n+l \notin \mathcal{N}_0 \, , \; l = 1, \ldots, k-1 \; ,$$

тогда

$$\vec{\mathbf{t}}_n = \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g-k+1} \cup \{(\infty^{(1)})^{k-1}\} \; , \quad \pi(t_{n,j}) < \infty \; ,$$

и

$$\vec{\mathbf{t}}_{n+l} = \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g-k+1} \cup \{(\infty^{(1)})^{k-1-l}\} \cup \{(\infty^{(0)})^{l}\}\ ,\ l = 1, \dots, k-1\ ,$$

причём

$$\infty^{(0)} \notin \vec{\mathbf{t}}_{n+k}\ ,$$

так как $\vec{\mathbf{t}}_{n+k-1}$, $\vec{\mathbf{t}}_{n+k}$ – единственные решения (4.4), получаем $\vec{\mathbf{t}}_{n+k-1} \cap \vec{\mathbf{t}}_{n+k} = \varnothing$.

Размер блока неединственных решений проблемы Якоби ограничен величиной $g-1$. Максимальный блок формируется после строго нормального индекса, для которого $\vec{\mathbf{t}}_n = \{(\infty^{(1)})^g\}$. Он заканчивается индексом $n+g-1$. Затем идёт единственное решение $\vec{\mathbf{t}}_{n+g} = \{(\infty^{(0)})^g\}$ с не строго нормальным индексом $n+g$, за которым следует единственное решение $\vec{\mathbf{t}}_{n+g+1} \cap \vec{\mathbf{t}}_{n+g} = \varnothing$ со строго нормальным индексом $n+g+1$. Таким образом, блок не строго нормальных индексов ограничен величиной g.

Теперь убедимся, что размер блоков рациональных аппроксимаций, в условиях Теоремы 3.1, тоже ограничен величиной g. Для этого мы используем факт (см. [1], Предложение 2, (2.23)-(2.24)), что предельные точки решений $\vec{\mathbf{t}}_n$ имеют ту же блочную структуру, что и сами решения $\vec{\mathbf{t}}_n$. Тогда для каждой предельной точки $\vec{\mathbf{t}}_n$, содержащей $\infty^{(0)}$, можно выбрать $\varepsilon > 0$, так чтобы обрамляющие соответствующий блок строго нормальные индексы, для достаточно больших n стали ε-нормальными, и, следовательно, по Теореме 3.1 эти ε-нормальные индексы являются нормальными индексами для рациональных аппроксимаций, а заключённый между ними блок по величине не превосходит g.

И так мы получили важное для приложений

Следствие 4.1. *В условиях Теоремы 3.1 размер блоков аппроксимаций Паде для функции $f \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{C}} \setminus A)$ не превышает величину g – рода римановой поверхности Шталя (2.4) для f (т.е. дубля экстремальной области D^* голоморфного продолжения f).*

5. Теоремы о скорости диофантовых аппроксимаций и их функциональные аналоги

В этой секции мы обсудим основные следствия Теоремы 3.1, касающиеся некоторых известных гипотез и задач об аппроксимациях алгебраических функций. Для алгебраических функций f заведомо выполняется условие **(AL)**, см. (3.1), но для корректного применения Теоремы 3.1 мы должны считать, что точки ветвления f находятся в общем положении, т.е. условия **(GP)** и **(fΔ)** (см. (3.2) и (3.3)) выполнены. Ранее в секции 3 (см. **Замечание 3.2.**) мы отмечали технический характер и способы устранения этих условий.

5.1. Скорость приближения алгебраических чисел рациональными. Сначала напомним основные известные факты о скорости диофантовых приближений иррациональных чисел. Именно для этих теорем ниже будут рассмотрены функциональные аналоги.

Скорость приближения действительных чисел рациональными измеряется в шкале, определяемой величиной знаменателя аппроксиманта. Именно в этой шкале подходящие непрерывной дроби (1.1) являются наилучшими приближениями, т.е. все рациональные числа, которые имеют меньшую величину знаменателя, чем у подходящей, не могут быть ближе этой подходящей к приближаемому ею числу.

Оценку скорости приближения сверху дает следующая

Теорема 5.1 (Марков-Гурвиц). *Для любого иррационального числа $\alpha \notin \mathbb{Q}$ неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\, q^{-2}, \tag{5.1}$$

имееет бесконечно много решений $p/q \in \mathbb{Q}$, все из которых являются подходящими непрерывной дроби числа α.

Если не конкретизировать константу в правой части (5.11) и не рассматривать уточнения этой теоремы (Цепочки Маркова), то доказательство этого утверждения (с константой 1) очень просто (следует из того, что среди n натуральных чисел, меньших n, не менее двух одинаковых).

Оценки снизу для скорости приближения алгебраических чисел $\alpha \in \mathbb{A}$ гораздо нетривиальней и имеют долгую историю. Начнем с простого утверждения, показывающего что для квадратичных иррациональностей показатель степени скорости приближений в (5.11) точен. Справедлива

Теорема 5.2 (Лиувилль 1844). *Для любого алгебраического числа k-го порядка*[†] *$\alpha \in \mathbb{A}_k$, $k \geqslant 2$ существует константа $C(\alpha)$ (эффективно определяемая по α), такая, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant C(\alpha)\, q^{-k}, \quad \forall p/q \in \mathbb{Q}. \tag{5.2}$$

Для произвольных $\alpha \in \mathbb{A}$ факт, что в оценках снизу показатель степени скорости приближения с точностью до произвольного малого $\varepsilon > 0$ совпадает с показателем в оценке сверху (5.11), был установлен К. Рота. Этому результату предшествовали несколько сильных промежуточных результатов, которые надо вспомнить для полноты картины.

[†] т. е. корня алгебраического уравнения k-й степени с рациональными коэффициентами

Теорема 5.3 (Туэ 1909)**.** *Пусть произвольное алгебраическое число* $\alpha \in \mathbb{A}_k$, $k \geqslant 2$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C(\varepsilon)$ *(неэффективная) такая, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C(\varepsilon)}{q^{k/2+1+\varepsilon}}, \quad \forall p/q \in \mathbb{Q}.$$

Затем оценка норвежского математика А. Туэ была усилена К. Л. Зигелем.

Теорема 5.4 (Зигель 1921)**.** *Пусть произвольное алгебраическое число* $\alpha \in \mathbb{A}_k$, $k \geqslant 2$. *Тогда* $\exists C(\alpha)$ *(неэффективная) такая, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C(\alpha)}{q^{2\sqrt{k}}}, \quad \forall p/q \in \mathbb{Q}. \tag{5.3}$$

Позднее, в 1947-1948 Ф. Дайсон и А. О. Гельфонд (независимо) улучшили множитель-константу 2 показателя степени в правой части (5.3), доведя его до $\sqrt{2}$. Наконец, справедлива

Теорема 5.5 (Рот 1955)**.** *Пусть произвольное алгебраическое число* $\alpha \in \mathbb{A}$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C(\varepsilon)$ *(неэффективная) такая, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C(\varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}, \quad \forall p/q \in \mathbb{Q}. \tag{5.4}$$

Теорему 5.5 часто называют теоремой Туэ–Зигеля–Рота. Оригинальные ссылки и доказательства приведенных здесь теорем можно посмотреть в [11, 12].

Алгебраические числа, для которых диофантово неравенство (5.4) справедливо с $\varepsilon = 0$, называют *медленно приближаемые иррациональности.* Множество таких чисел будем обозначать $\widetilde{\mathbb{A}}$. Нетрудно показать (см. например [11]), что свойство $\alpha \in \widetilde{\mathbb{A}}$ эквивалентно ограниченности неполных частных (коэффициентов) непрерывной дроби числа α:

$$\alpha \in \widetilde{\mathbb{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists C(\alpha): \quad a_j < C, \ j \in \mathbb{N}, \text{ для } \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1+} \, \frac{1}{a_2+} \, \frac{1}{a_3 + \ldots}.$$

Ясно, что $\mathbb{A}_2 \subseteq \widetilde{\mathbb{A}}$. Это следует, как из Теоремы 5.2 Лиувилля, так и из теоремы Эйлера-Лагранжа о периодичности непрерывных дробей для $\alpha \in \mathbb{A}_2$.

В то же время, опровергнуть или доказать аналогичное для

$$\mathbb{A}_k \subseteq \widetilde{\mathbb{A}}, \qquad k > 2 \quad ??? \tag{5.5}$$

является открытой и очень трудной проблемой.

Численные расчеты непрерывной дроби для $\alpha := \sqrt[3]{2}$, сделанные в [13, 14, 15], оставляют мало оптимизма для выполнения (5.5)

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3+} \, \frac{1}{1+} \, \frac{1}{5+} \, \frac{1}{1 + \ldots},$$

$a_{10} = 14, \ldots \quad a_{36} = 543, \ldots \quad a_{572} = 7451, \ldots \quad a_{620} = 4941\ldots$.

5.2. Неархимедова норма и приближения рациональными функциями. Как мы уже отмечали в п.п. 1.1, подходящие (1.5) непрерывной дроби (1.4) являются диагональными аппроксимациями Паде π_n степенного ряда $f(z)$, см.(1.3). Напомним эквивалентное (1.6) определение аппроксимаций Паде, которое прояснит аналогию между теориями нормальности аппроксимаций Паде и скорости диофантовых приближений. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\nu_n(f) = \sup\{\nu(f-r) : r \in \mathcal{R}_n\}, \quad , \quad \nu(f(z)) := \operatorname*{ord\,zero}_{z=\infty} f\,, \tag{5.6}$$

где $\mathcal{R}_n$ – множество всех рациональных функций порядка не выше n. Тогда

$$\forall n \quad \exists\,!\,\pi_n \in \mathcal{R}_n : \quad \nu_n(f) = \nu(f-\pi_n), \tag{5.7}$$

и функция π_n называется n-я *диагональная аппроксимация Паде ряда* $f(z)$. Если $a,\ a>1$, фиксировано (произвольным образом), то функционал

$$\|f\|_a = a^{-\nu(f)}, \qquad f(z) = \sum_{k>-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{z^k} \in \mathbb{C}((z))_{z=\infty} \tag{5.8}$$

определяет неархимедову[‡] норму $\|\cdot\|_a$ на поле формальных степенных рядов $\mathbb{C}((z))_{z=\infty}$ в точке $z=\infty$. Тогда π_n из (5.7) – рациональная функция наилучшего приближения f в классе $\mathcal{R}_n$ относительно этой нормы:

$$\|f-\pi_n\|_a = \inf\{\|f-r\|_a \,:\, r \in \mathcal{R}_n\}. \tag{5.9}$$

Теперь простое (линейная алгебра) формальное свойство аппроксимаций Паде:

$$\exists\ \Lambda(f): \quad \Lambda \subset \mathbb{N}, \quad \sharp\Lambda = \infty, \qquad \nu_n(f) > 2n, \quad n \in \Lambda, \tag{5.10}$$

может быть переформулировано в виде функционального аналога теоремы 5.1.

Теорема 5.6 (Кронекер)**.** *Для любого ряда* $f \in \{\mathbb{C}((z))_{z=\infty} \setminus \mathcal{R}(z)\}$ *неравенство*

$$\|f-r\|_a \leqslant (a^n)^{-2}, \qquad r \in \mathcal{R}_n, \tag{5.11}$$

имеет бесконечно много решений $r \in \mathcal{R}(z) := \cup_n \mathcal{R}_n$*, все из которых являются подходящими непрерывной дроби ряда* f *(т.е. аппроксимациями Паде).*

Таким образом, имеются следующие аналогии между диофантовыми приближениями чисел и рациональными приближениями степенных рядов:

$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{A}$ $\quad\leftrightarrow\quad$ $\mathbb{C}((z))_{z=\infty}, \mathcal{R}(z)$, $\mathcal{P}(z)$, $\mathbb{A}(z)$;

$|n|$ для $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\| := |\cdot|$ $\quad\leftrightarrow\quad$ $\deg p$ для $p \in \mathcal{P}(z)$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_a$.

В дальнейшем нам удобнее будет формулировать результаты в терминах касания степенных рядов (5.6), чем неархимедовой нормы (5.8), при этом привычные в теории диофантовых приближений знаки неравенств сменятся на противоположные.

[‡] т.е. в правой части неравенства треугольника вместо суммы стоит максимальное слагаемое.

5.3. Гипотеза Колчина и функциональная теорема Туэ-Зигеля-Рота. В 1959 г. Колчин, см. [16], выдвинул гипотезу, что для заданных формальным степенным рядом решений алгебраических и дифференциальных уравнений над полем рациональных функций $\mathcal{R}(z)$ для любого $\varepsilon > 0 \quad \exists C(f)$:

$$\nu_n(f) \,<\, (2+\varepsilon)n \,+\, C(f), \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.12}$$

Это утверждение, переписанное в терминах неархимедовой нормы (5.8), является функциональным аналогом Теоремы 5.4 Туэ-Зигеля-Рота. Существует несколько доказательств гипотезы Колчина (5.12): как с неэффективной константой $C(f)$, см. [17], так и с эффективными константами [18], [19]. Подробнее о гипотезе Колчина ее связи[§] с современным развитием теории аппроксимаций Паде см. обзор С. П. Суетина [20].

Отметим, что "неэффективная" версия функционального аналога Теоремы 5.4 Туэ-Зигеля-Рота:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(f)}{n} = 2\,, \tag{5.13}$$

была сформулирована (в качестве открытой задачи) А. А. Гончаром в [22] в более общей постановке: для f - элемента многозначной аналитической функции, имеющей конечное множество особых точек, т.е. в более широком, чем алгебраические функции, классе (1.7). Справедливость этой гипотезы Гончара вытекает из результатов Шталя [3, 4, 5].

5.4. ”$\varepsilon = 0$” – **гипотеза Гончара-Чудновских.** В той же статье 1978 года [22] А. А. Гончаром было высказано предположение, что для алгебраических функций утверждение гипотезы (5.13) может быть существенно усилено: *если f – элемент алгебраической функции, отличной от рациональной, то $\{\nu_n(f) - 2n\}$ – ограниченная последовательность.* То есть в функциональном аналоге Теоремы 5.4 Туэ-Зигеля-Рота можно положить $\varepsilon = 0$

$$f \in \mathbb{A}(z) \,\Rightarrow\, \exists C(f)\,:\quad \nu_n(f) \,<\, 2n \,+\, C(f), \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.14}$$

В недавнем (более доступном, чем [22]) обзоре [21] приведены интересные рассуждения А. А. Гончара, мотивирующие гипотезы (5.13) и (5.14) в связи с однозначностью (многозначностью) аналитических функций, нормальностью аппроксимаций Паде и лакунарными степенными рядами.

Позднее, в 1984 г. Чудновские [19] также предположили справедливость ”$\varepsilon = 0$” усиления гипотезы Колчина (5.14). В той работе они рассматривали

[§]эта связь отмечалась и ранее, см. цитату из [19]: "In the functional case, the solution of Kolchins problem, is equivalent to the normality and the almost normality of Pade approximations. This point will be expanded upon in further papers in connection with the conjecture that $\varepsilon = 0$ in Kolchin's problem ..."

нормальность специальных классов аппроксимаций Эрмита-Паде (функциональный аналог теоремы Шмидта [23] для совместных аппроксимаций набора функций). В частности (см. [19], стр. 43), они объявили о доказательстве этой гипотезы для наборов решений дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, гипергеометрического уравнения. Также в [19], секция 5 "$\varepsilon = 0$" гипотеза доказана для набора из $(d-1)$ мероморфной функции на римановой поверхности алгебраической функции порядка $(d-1)$ (этот результат уместно сравнить с одной теоремой Наттолла, см. [24]).

Для алгебраических функций второго порядка справедливость "$\varepsilon = 0$" гипотезы (5.14) вытекает из функциональной теоремы Лиувилля, см. [17].

Для алгебраических функций произвольного порядка справедливость "$\varepsilon = 0$" гипотезы (5.14) (в условиях общего положения Теоремы 3.1) вытекает из Следствия 4.1. Более того, мы имеем эффективную константу в (5.14):

Следствие 5.1 (Теоремы 3.1)**.** *Пусть $f \in \mathbb{A}(z)$ удовлетворяет условиям общего положения **(GP)** и **(fΔ)** (см.* (3.1) *и* (3.3)*). Тогда* (5.14) *справедливо с константой $C(f) := g$, где g – род римановой поверхности Шталя (2.4) для f (т.е. дубля экстремальной области D^* голоморфного продолжения f).*

Как мы уже отмечали (см. Замечание 3.2.), условия общего положения **(GP)** и **(fΔ)** носят технический характер и имеются подходы для возможного избавления от них. Это обстоятельство позволяет нам сделать предположение об эффективной константе в самом общем случае.

Гипотеза 5.1. *Для произвольной $f \in \mathbb{A}(z)$ справедливо* (5.14)*, причем*

$$C(f) := g + d\,, \qquad \text{где} \quad g := \mathrm{gen}(\mathfrak{R}), \quad d := \deg\left(\mathrm{Discrim}(f(z))\right)\,. \tag{5.15}$$

Снятие в Следствии 5.1 ограничения **(GP)** влечет расширение класса римановых поверхностей Шталя $\mathfrak{R}$, что отражает первое слагаемое в (5.15). Второе слагаемое связано с условием **(fΔ)**, оно мажорирует число нулей скачка f на экстремальном разрезе Δ. Каждая смена знака скачка на Δ может породить "ложный" полюс (см. следующую секцию), который может оказаться в бесконечности и нарушить нормальность (это можно понять, вырезая из Δ окрестности простых нулей скачка, с последующим переходом к пределу).

В заключение этого пункта отметим, что справедливость "$\varepsilon = 0$" гипотезы (5.14) влечет ограниченность (степени) неполных частных непрерывной дроби (1.4) для $f \in \mathbb{A}(z)$. Представить себе нечто подобное для чисел $\alpha \in \mathbb{A}$ (см. пункт 5.1 или цитату из [19][¶]) просто невозможно.

[¶] "We want to note that our conjecture that $\varepsilon = 0$ in Kolchin's problem is the feature of the rational approximation problem in the functional case only. For numbers it seems highly implausible that one can have $\varepsilon = 0$."

6. “Ложные” полюсы, дуплеты и специальные дивизоры

Строгого определения блуждающего “wandering”, или ложного “spurious” полюса рациональной аппроксимации, пожалуй, нет, но интуитивно ясно – это полюс, который не моделирует особенность приближаемой функции (т.е полюс рационального аппроксиманта находится “вдалеке” от полюса мероморфной или от экстремального разреза для многозначной функций). В этой секции мы обсудим это явление с точки зрения Теоремы 3.1.

6.1. Гипотеза Шталя. В 1998 г. Шталем была сформулирована

Гипотеза([25], гипотеза 6). *Пусть f – алгебраическая функция, голоморфная в точке z_0. Тогда найдется некоторое число $N = N(f) \in \mathbb{N}$, такое, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ общее число (с учетом кратностей) ложных полюсов аппроксимации Паде π_n не превосходит $N = N(f)$.*

Для нас потеря нормальности – появление ложного полюса в бесконечности, так гипотеза Шталя обобщает гипотезу Гончара-Чудновских. Справедливо

Следствие 6.1 (Теоремы 3.1). *Пусть $f \in \mathbb{A}(z)$ удовлетворяет условиям общего положения **(GP)** и **(fΔ)** (см.* (3.1) *и* (3.3)*). Тогда существует подпоследовательность индексов $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}: \quad n_{j+1} - n_j < g, \quad \forall j \in \mathbb{N}$, для которых гипотеза Шталя справедлива с константой $N(f) := g$, где g – род римановой поверхности Шталя (2.4) для f (т.е. дубля экстремальной области D^* голоморфного продолжения f).*

Как и в случаях Следствия 5.1 и Гипотезы 5.1, мы можем предположить, что верна в общем случае

Гипотеза 6.1. *Гипотеза Шталя справедлива $\forall f \in \mathbb{A}(z)$ с константой*

$$N(f) := g + d, \qquad \text{где} \quad g := \mathrm{gen}(\mathfrak{R}), \quad d := \deg\left(\mathrm{Discrim}(f(z))\right).$$

6.2. Классификация ложных полюсов и дуплетов Фруассара. Структура решений проблемы Якоби (2.15) позволяет классифицировать так называемые блуждающие “wandering” полюсы. Имеем

$$\vec{\mathbf{t}}_n = \{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g-2l} \cup \{z_j^{(0)}, z_j^{(1)}\}_{j=1}^{l}, \tag{6.1}$$

где среди точек $\{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g-2l}$ нет точек, находящихся в инволюции. Как мы уже отмечали, точки, находящиеся в инволюции, нарушают единственность решения проблемы Якоби и могут быть выбраны в любом месте. Однако небольшие возмущения превращают их в точки с близкими проекциями в $\mathbb{C}$,

тем самым решение приобретает единственность и фиксируется положение этих точек. Так как
$$R_n(z) = q_n(z)\, f(z) - p_n(z)\ ,$$
то с учётом (4.3) в окрестности проекций точек, близких к инволюции, будет находиться нуль q_n, нуль R_n, а следовательно, и нуль p_n. Это соответствует эффекту дуплета [26]: близких нуля и полюса. Кроме дуплетов существуют полюсы аппроксимации, находящиеся вблизи $\{\mathbf{t}_{n,j}\}_{j=1}^{g-2l} \cap \mathfrak{R}^{(0)}$. В окрестности этих полюсов (будем называть их ложными "spurious") нет нуля функции остатка R_n. Тем не менее, равномерная сходимость (3.6) аппроксимаций на границе окрестности ложного полюса и теорема Руше (версия для мероморфной функции) влекут наличие нуля p_n в этой окрестности.

Список литературы

[1] A. I. Aptekarev and M. L. Yattselev, *Pade approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall-Stahl polynomials*, Acta Mathematica, 215, 2015, 217 – 280; ArXiv 1109.0332

[2] J. Nuttall, *On convergence of Padé approximants to functions with branch points*, in Padé and rational Approximation, (E. B. Saff, R. S. Varga, eds.), Academic Press, New York, 1977, pp. 101–109.

[3] H. Stahl, *Extremal domains associated with an analytic function. I, II*, Complex Variables Theory Appl., 1985, 4:311–324, 325–338.

[4] H. Stahl, *Structure of extremal domains associated with an analytic function*, Complex Variables Theory Appl., 1985, 4:339–356.

[5] H. Stahl. *Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I, II*, Constr. Approx., 1986, 2(3):225–240, 241–251.

[6] E.A. Perevoznikova and E.A. Rakhmanov, *Variation of the equilibrium energy and S-property of compacta of minimal capacity*, Manuscript, 1994.

[7] A. Martínez Finkelshtein and E.A. Rakhmanov, *Critical measures, quadratic differentials, and weak limits of zeros of Stieltjes polynomials*, Comm. Math. Physics, 2011, 302:53–111.

[8] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T-R. McLaughlin, S. Venakides, and X. Zhou, *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), no. 11, 1335–1425.

[9] A. I. Aptekarev, *Sharp constants for rational approximations of analytic functions*, Mat. Sb. **193** (2002), no. 1, 3–72 (in Russian); Sbornik Math. **193** (2002), no. 1–2, 1–72.

[10] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Providence RI, 1975 (fourth edition).

[11] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука , Москва, 1988.

[12] Н. И. Фельдманн, *Приближения алгебраических чисел*, Издат. МГУ , Москва, 1981.

[13] А. Д. Брюно, *Разложение алгебраических чисел в цепные дроби,* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, том 4, номер 2, 211–221.

[14] S. Lang, H. Trotter, *Continued fractions for some algebraic numbers*, J. Reine Angew. Math. **225** (1972), 112–134.

[15] А. И. Аптекарев, А. В. Климов, *Разложение корня кубического из двух в непрерывную дробь,* неопубликованная рукопись, 1975.

[16] E. R. Kolchin, *Rational approximation to solutions of algebraic differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 10 (1959), 238-244.

[17] S. Uchiyama, *Rational approximations to algebraic functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I 15 (1961), 173–192.

[18] G. V. Chudnovsky, *On the method of Thue–Siegel*, Ann. of Math. (2) 117:2 (1983), 325–382.

[19] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *The Wronskian Formalism for Linear Differential Equations and Pade Approximants*, ADVANCES IN MATHEMATICS 53, 28-54 (1984).

[20] S. P. Suetin, *Distribution of the zeros of Pade polynomials and analytic continuation*, Russian Math. Surveys, 70:5 (2015), 901–951.

[21] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, *Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены*, УМН, 66:6 (2012), 37-122.

[22] А. А. Гончар, *5.6. Рациональная аппроксимация аналитических функций,* Исследования по линейным операторам и теории функций, 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 81, Наука, Ленинград. отд., Л. 1978, с. 182–185; English transl., A. A. Gonchar, *5.6. Rational approximation of analytic functions*, J. Soviet Math. 26:5 (1984), 2218–2220.

[23] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation,* Lecture Notes in Mathematics, **785**, Springer-Verlag, Berli/New York, 1980.

[24] J. Nuttall, *Hermite-Pade approximants to functions meromorfic on a Riemann surface*, J. Appr. Theory, 32 (1981), 233-240.

[25] H. Stahl, *Conjectures around the Baker–Gammel–Wills conjecture,* Constr. Approx., 13 (1997), 287–292.

[26] M. Froissart, *Approximation de Pade: application a la physique des particules elementaires*, Recherche Cooperative sur Programme (RCP), 9, 25, ред. J. Carmona, M. Froissart, D. W. Robinson, D. Ruelle, Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Strasbourg, 1969, 1–13.