Multiplicación de Matrices ‘Naïve’

Carl C. Cowen

IUPUI

(Indiana University Purdue University Indianapolis)

Universidad de Zaragoza, 6 julio 2009

Los estudiantes de álgebra lineal aprenden, para matrices $m \times n$ como sumar las matrices A y B, $A + B = C$ si y sólo si $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$.

Se esperaría la multiplicación de matrices $AB = C$ si y sólo si $a_{ij}b_{ij} = c_{ij}$, Pero, el profesór dice "¡No! ¡Es mucho más complicado que esto!"

Hoy, quiero explicar que este tipo de multiplicación no sólo es lógico pero también es muy práctico y muy interesante y tiene muchas consecuencias matemáticas.

Definición

Si A y B son matrices $m \times n$, el producto de *Schur (o Hadamard o fácil o 'naïve') de A y B* es la matriz $m \times n$ $C = A \bullet B$ con $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

Estas ideas son del siglo pasado de Moutard (1894), (¡)que ni se fijó que había probado nada(!), Hadamard (1899), y Schur (1911).

Hadamard examinó las funciones analíticas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ que tienen puntos singulares en $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_j\}$ respectivamente.

Probó que si $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ tiene puntos singulares $\{\gamma_k\}$, entonces $\{\gamma_k\} \subset \{\alpha_i \beta_j\}$.

Nos sorprende un poco menos cuando se consideran los productos de convolución:

Sean f y g las funciones 2π-periódicas en $\mathbb{R}$ y

$$a_k = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} \qquad \text{y} \qquad b_k = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} g(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

para que

$$f \sim \sum a_k e^{ik\theta} \qquad \text{y} \qquad g \sim \sum b_k e^{ik\theta}$$

Si $h(\theta) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta - t) g(t)\,\frac{dt}{2\pi}$, entonces $h \sim \sum a_k b_k e^{ik\theta}$

y si $f \geq 0$ y $g \geq 0$ implica $h \geq 0$.

El nombre de Schur se relaciona con el producto de matrices porque publicó el primer teorema de este tipo de multiplicación de matrices.

Definición

Una matriz real (o compleja) $n \times n$ se llama *positiva* o *positiva semidefinida* si

- $A = A^*$
- $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ para todo x en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$)

Entonces

- Para toda matriz A, ambas AA^* y A^*A son positivas.
- Reciprocamente, si B es positiva, entonces $B = A^*A$ para alguna A.
- En las estadísticas, todas las matrices de varianza-covarianza son positivas.

Ejemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *NO* es positiva:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ son positivas

pero $BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$ no lo es.

Teorema del Producto de Schur (1911)

Si A y B son matrices $n \times n$ positivas,

entonces $A \bullet B$ es también positiva.

Aplicaciones:

El diseño experimental: Si A y B son matrices de varianza-covarianza,

entonces $A \bullet B$ es una matriz de varianza-covarianza también.

P.D.E.'s: Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^2$ y sea L el operador diferencial

$$Lu = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

L se llama *elíptico* si $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es positiva definida.

$$Lu = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

El Principio del Mínimo Débil (Moutard, 1894)

Si L es elíptico, $c < 0$, y $Lu \equiv 0$ en Ω,

entonces u no puede tener un valor mínimo negativo en Ω.

Prueba:

Por reducción al absurdo:

Si u tiene un valor mínimo en (x_0, y_0) y $u(x_0, y_0) < 0$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

y

$$\begin{aligned} 0 = Lu &= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu \\ &= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \end{aligned}$$

El Principio del Mínimo Débil (Moutard, 1894)

Si L es elíptico, $c < 0$, y $Lu \equiv 0$ en Ω,

entonces u no puede tener un valor mínimo negativo en Ω.

Prueba:

$$
\begin{aligned}
0 = Lu \;&=\; a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu
\end{aligned}
$$

El Principio del Mínimo Débil (Moutard, 1894)

Si L es elíptico, $c < 0$, y $Lu \equiv 0$ en Ω,

entonces u no puede tener un valor mínimo negativo en Ω.

Prueba:

$$\begin{aligned}
0 = Lu \;&=\; a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \\
&=\; \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&=\; \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu
\end{aligned}$$

El Principio del Mínimo Débil (Moutard, 1894)

Si L es elíptico, $c < 0$, y $Lu \equiv 0$ en Ω,

entonces u no puede tener un valor mínimo negativo en Ω.

Prueba:

$$
\begin{aligned}
0 = Lu &= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu
\end{aligned}
$$

El Principio del Mínimo Débil (Moutard, 1894)

Si L es elíptico, $c<0$, y $Lu \equiv 0$ en Ω,

entonces u no puede tener un valor mínimo negativo en Ω.

Prueba:

$$
\begin{aligned}
0 = Lu &= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu
\end{aligned}
$$

El Principio del Mínimo Débil (Moutard, 1894)

Si L es elíptico, $c < 0$, y $Lu \equiv 0$ en Ω,

entonces u no puede tener un valor mínimo negativo en Ω.

Prueba:

$$\begin{aligned}
0 = Lu \;&=\; a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&> 0
\end{aligned}$$

El Principio del Mínimo Débil (Moutard, 1894)

Si L es elíptico, $c < 0$, y $Lu \equiv 0$ en Ω,

entonces u no puede tener un valor mínimo negativo en Ω.

Prueba:

$$\begin{aligned}
0 = Lu \;&=\; a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + cu \\
&> 0
\end{aligned}$$

¡Contradicción! $\blacksquare$

Teorema de Unicidad de Fejer

Si L es elíptico y $c < 0$ en Ω, entonces

hay a lo sumo una solución del problema de valores frontera

$$Lu = f \qquad en\ \Omega$$

$$u = g \qquad en\ \partial\Omega$$

que es continua en $\overline{\Omega}$ y lisa en Ω.

Prueba:

Si u_1 y u_2 son ambas soluciones con $u_1 \neq u_2$, entonces para que $u_1 = g = u_2$ en $\partial\Omega$ y $u_1 - u_2 = 0 = u_2 - u_1$ en $\partial\Omega$, $u_1 - u_2$ o $u_2 - u_1$ debe tener un valor mínimo negativo en Ω.

Pero $Lu_1 = f = Lu_2$ en Ω, porque $L(u_1 - u_2) \equiv 0 \equiv L(u_2 - u_1)$ en Ω Moutard: ni la una ni la otra tiene un valor mínimo negativo en Ω así que tiene que ser $u_1 \equiv u_2$. $\blacksquare$

Objectivo: Probar el Teorema de Schur

Recuerde $(AB)^t = B^t A^t$ y $(AB)^* = B^* A^*$

Hágalo para el caso de escalares reales:

porque con los escalares complejos es lo mismo pero menos cómodo

para la mayor parte de los matématicos

Use los vectores de columna:

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n = x^t y$$

Lema

Una matriz $n \times n$ A es positiva si y sólo si

$$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + v_3 v_3^t + \cdots + v_k v_k^t$$

para algunos vectores $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ y $k \leq n$.

Lema

Una matriz $n \times n$ A *es positiva si y sólo si*

$$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + v_3 v_3^t + \cdots + v_k v_k^t$$

para algunos vectores $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ *y* $k \leq n$.

Prueba:

($\Rightarrow$) Sea x en $\mathbb{R}^n$ y $A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + \cdots + v_k v_k^t$ para vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x \rangle &= \langle (v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + \cdots + v_k v_k^t) x, x \rangle \\
&= \sum_j \langle v_j v_j^t x, x \rangle = \sum_j (v_j v_j^t x)^t x \\
&= \sum_j x^t ((v_j^t)^t v_j^t x = \sum_j (v_j^t x)^t (v_j^t x) \\
&= \sum_j \langle v_j, x \rangle \langle v_j, x \rangle = \sum_j |\langle v_j, x \rangle|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Lema

Una matriz $n \times n$ A es positiva si y sólo si

$$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + v_3 v_3^t + \cdots + v_k v_k^t$$

para algunos vectores $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ y $k \leq n$.

Prueba:

($\Leftarrow$) Sea A positiva. Puesto que $A = A^t$, existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que consiste en autovectores de A, llamemos a esta base w_1, w_2, $\cdots$, w_n. Entonces, para cada j, sean α_j los autovalores de A, esto es, $Aw_j = \alpha_j w_j$.

Puesto que A es positiva, $\alpha_j \geq 0$ para todo j. Sean numerados para que $1 \leq j \leq k$, $\alpha_j > 0$ y $j \geq k+1$, $\alpha_j = 0$.
Para $1 \leq j \leq k$, escogemos $\beta_j > 0$ con $\alpha_j = \beta_j^2$ y sea $v_j = \beta_j w_j$.

Entonces, demostramos que

$$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + \cdots + v_k v_k^t = \alpha_1 w_1 w_1^t + \alpha_2 w_2 w_2^t + \cdots + \alpha_k w_k w_k^t$$

Lema

Una matriz $n \times n$ A es positiva si y sólo si

$$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + v_3 v_3^t + \cdots + v_k v_k^t$$

para algunos vectores $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ y $k \leq n$.

Prueba:

($\Leftarrow$) Para demostrar que

$$A = \alpha_1 w_1 w_1^t + \alpha_2 w_2 w_2^t + \cdots + \alpha_k w_k w_k^t$$

mostramos que para cada x en $\mathbb{R}^n$, Ax y

$(\alpha_1 w_1 w_1^t + \alpha_2 w_2 w_2^t + \cdots + \alpha_k w_k w_k^t)x$ es el mismo vector.

Si x es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces x es una combinación lineal de los w_j's, llamemos $x = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n$. Entonces Ax está dado por

$$\begin{aligned} Ax &= A(x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n) \\ &= x_1 A w_1 + x_2 A w_2 + \cdots + x_n A w_n \end{aligned}$$

Lema

Una matriz $n \times n$ A es positiva si y sólo si

$$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + v_3 v_3^t + \cdots + v_k v_k^t$$

para algunos vectores $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ y $k \leq n$.

Prueba:

$(\Leftarrow)$ que es

$$\begin{aligned} Ax &= x_1 A w_1 + x_2 A w_2 + \cdots + x_n A w_n \\ &= x_1 \alpha_1 w_1 + x_2 \alpha_2 w_2 + \cdots + x_k \alpha_k w_k + \cdots + x_n \alpha_n w_n \\ &= x_1 \alpha_1 w_1 + x_2 \alpha_2 w_2 + \cdots + x_k \alpha_k w_k + \cdots + x_n 0 w_n \\ &= x_1 \alpha_1 w_1 + x_2 \alpha_2 w_2 + \cdots + x_k \alpha_k w_k \end{aligned}$$

Fíjase que $w_i^t w_j = \langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$.

Lema

Una matriz $n \times n$ A *es positiva si y sólo si*

$$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + v_3 v_3^t + \cdots + v_k v_k^t$$

para algunos vectores $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ *y* $k \leq n$*.*

Prueba:

($\Leftarrow$) Como en el cálculo de arriba,

$$\begin{aligned}
(v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + \cdots + v_k v_k^t)x &= (\alpha_1 w_1 w_1^t + \alpha_2 w_2 w_2^t + \cdots + \alpha_k w_k w_k^t)x \\
&= (\sum_i \alpha_i w_i w_i^t)(\sum_j x_j w_j) \\
&= \sum_{i,j} (\alpha_i w_i w_i^t) x_j w_j = \sum_{i,j} \alpha_i x_j w_i (w_i^t w_j) \\
&= \sum_i \alpha_i x_i w_i = x_1 \alpha_1 w_1 + x_2 \alpha_2 w_2 + \cdots + x_k \alpha_k w_k
\end{aligned}$$

Entonces, para cada x, $Ax = (v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + \cdots + v_k v_k^t)x$ y

$A = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + \cdots + v_k v_k^t$ $\blacksquare$

Lema

Si u y v son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces $(uu^t)\bullet(vv^t) = (u\bullet v)(u\bullet v)^t$.

Prueba:

Si $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, entonces $uu^t = \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2u_2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & u_nu_n \end{pmatrix}$

Luego,

$$(uu^t)\bullet(vv^t) = \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2u_2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & u_nu_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & \cdots & v_1v_n \\ v_2v_1 & v_2v_2 & \cdots & v_2v_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_nv_1 & v_nv_2 & \cdots & v_nv_n \end{pmatrix} =$$

Lema

Si u y v son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces $(uu^t)\bullet(vv^t) = (u\bullet v)(u\bullet v)^t$.

Prueba:

Luego,

$$(uu^t)\bullet(vv^t) = \begin{pmatrix} u_1u_1v_1v_1 & u_1u_2v_1v_2 & \cdots & u_1u_nv_1v_n \\ u_2u_1v_2v_1 & u_2u_2v_2v_2 & \cdots & u_2u_nv_2v_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_nu_1v_nv_1 & u_nu_2v_nv_2 & \cdots & u_nu_nv_nv_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1v_1u_1v_1 & u_1v_1u_2v_2 & \cdots & u_1v_1u_nv_n \\ u_2v_2u_1v_1 & u_2v_2u_2v_2 & \cdots & u_2v_2u_nv_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_nv_nu_1v_1 & u_nv_nu_2v_2 & \cdots & u_nv_nu_nv_n \end{pmatrix} = (u\bullet v)(u\bullet v)^t$$

$\blacksquare$

Teorema del Producto de Schur (1911)

Si A y B son matrices $n \times n$ positivas,

entonces $A \bullet B$ es también positiva.

Prueba:

Puesto que A y B son positivas,

existen vectores u_1, u_2, $\cdots$, u_k tal que $A = u_1 u_1^t + u_2 u_2^t + \cdots + u_k u_k^t$

y vectores v_1, v_2, $\cdots$, v_ℓ tal que $B = v_1 v_1^t + v_2 v_2^t + \cdots + v_\ell v_\ell^t$.

Entonces,

$$A \bullet B = \left(\sum_i u_i u_i^t \right) \bullet \left(\sum_j v_j v_j^t \right)$$

$$= \sum_{i,j} (u_i u_i^t) \bullet (v_j v_j^t) = \sum_{i,j} (u_i \bullet v_j) \bullet (u_i v_j)^t \geq 0$$

$\blacksquare$

Corolario

Si $A = (a_{ij})$ *es una matriz* $n \times n$ *positiva, entonces* (a_{ij}^2), (a_{ij}^3), $(e^{a_{ij}})$ *son positivas también.*

¡Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ es positiva,

entonces $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 27 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} e^3 & e^{-2} \\ e^{-2} & e^2 \end{pmatrix}$ son positivas también!

Aplicación: Problemas de la Complección de una Matriz

¿Existen números a, b, y c para que $A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & a & b \\ 2 & 7 & 2 & c \\ a & 2 & 17 & -3 \\ b & c & -3 & 13 \end{pmatrix}$ sea positiva?

En este caso, ¡sí!: $a = 7$, $b = 5$, and $c = 8$.

Problema General

Dada B una matriz $n \times n$ fija, calcular la *norma del multiplicador de Schur de* B, esto es, encuentrar la constante más pequeña K_B para que

$$\|X \bullet B\| \leq K_B \|X\|$$

Además,

queremos tener el método computacional efectivo para encontrar K_B.

Schur (1911)

Si B es una matriz $n \times n$ positiva, entonces la norma del multiplicador de Schur de B es su entrada diagonal más grande.

Prueba:

Si β es la entrada diagonal más grande de B,

entonces $\|B \bullet I\| = \beta$ y $K_B \geq \beta$.

Fíjese que $\|A\| \leq \alpha$ si y sólo si $\begin{pmatrix} \alpha I & A \\ A^* & \alpha I \end{pmatrix} \geq 0$.

El Teorema de Schur implica,

$$0 \leq \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} I & A \\ A^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \bullet I & B \bullet A \\ B \bullet A^* & B \bullet I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B \bullet I & B \bullet A \\ (B \bullet A)^* & B \bullet I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \beta I & B \bullet A \\ (B \bullet A)^* & \beta I \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$